Arkadiusz Neubauer
IV rok, Fizyka z Informatyką.

Specjalistyczna Pracownia Komputerowa „Obliczanie widma Lapunowa”

1 Problem fizyczny

W poniższej pracy przedstawiono numeryczną metodę obliczania widma Lapunowa dla modelu Lorenza i odwzorowania Henona. Badane układy dynamiczne posiadają wielowymiarową przestrzeń fazową, zatem mamy doczynienia ze zbiorem wykładników Lapunowa zwanym widmem Lapunowa. Wykładników Lapunowa λ można używać jako miary wrażliwości na warunki początkowe, która jest charakterystyczna dla układów chaotycznych, takich jak atraktor modelu Lorenza. Jeśli λ jest ujemne ewolucja nie jest chaotyczna, jeśli λ jest dodatnie to ewolucja układu przejawia dużą wrażliwość na warunki początkowe zatem jest chaotyczna. Jeśli pozwolimy układowi ewoluować z różniących się nieco stanów początkowych, x i $x+\epsilon$, to po n iteracjach rozbieżność tych stanów można w przybliżeniu opisać zależnością $\epsilon(n) \approx \epsilon e^{\lambda n}$. Rozważmy konkretne odwzorowanie postaci $x_{n+1} = f(x_n)$. Różnica pomiędzy dwoma bliskimi stanami początkowymi po n-tym kroku wynosi:

$$\ln\left(\frac{|f^n(x+\epsilon) - f^n(x)|}{\epsilon}\right) \approx n\lambda \tag{1}$$

Dla małego ϵ: $\lambda \approx \frac{1}{n}\ln\left(\frac{df^n}{dx}\right)$. Przejdziemy do granicy z n dążącym do nieskończoności i potraktujemy pochodną n-tej iteracji jako pochodną funkcji złożonej, by otrzymać:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\ln|f'(x_i)| \tag{2}$$

Zatem wykładnik Lapunowa daje średnią szybkość rozciągania na jedną iterację. [1]

[1] „*Wstęp do dynamiki układów chaotycznych*”, G. L. Baker, J. P. Gollub - str. 92

2 Widmo Lapunowa dla modelu Lorenza

Model Lorenza zadany jest przez układ trzech równań różniczkowych:

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y, \tag{3}$$
$$\frac{dy}{dt} = -xz + rx - y, \tag{4}$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz, \tag{5}$$

gdzie σ, b są stałymi bezwymiarowymi charakteryzującymi układ, r jest parametrem kontrolnym.

Rozważamy dla przykładu zbiór warunków początkowych, które tworzą kulę w badanej przestrzeni fazowej dla modelu Lorenza. Jeżeli będziemy iterować równania Lorenza (3 - 5) wtedy zbiór punktów przestrzeni fazowej zmieni swój kształt. Prędkość z jaką to zaburzenie zwiększa lub zmniejsza się w czasie nazywamy wykładnikiem Lapunowa. Jeżeli badany układ jest chaotyczny, to zazwyczaj kula powiększa się w jednym kierunku, a maleje w dwóch pozostałych. W takim wypadku możemy zdefiniować trzy wykładniki Lapunowa mierzące deformację w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach. Ilość wykładników Lapunowa jest więc zależna od wymiaru układu. Są one jednym z kryteriów chaotyczności ruchu.

Aby znaleźć wykładniki Lapunowa posłużę się następującym algorytmem:

1. Linearyzujemy badane równania z modelu Lorenza. Zlinearyzowane równania Lorenza mają postać:

$$\frac{d\Delta x}{dt} = -\sigma \Delta x + \sigma \Delta y, \tag{6}$$
$$\frac{d\Delta y}{dt} = -x\Delta z - z\Delta x + r\Delta x - \Delta y, \tag{7}$$
$$\frac{d\Delta z}{dt} = x\Delta y + y\Delta x - b\Delta z. \tag{8}$$

2. Definiujemy wartość początkową $\vec{r}(0)$ dla wyjściowych równań (3 - 5) i trzy ortogonalne wartości początkowe $\Delta\vec{r}_\alpha(0)$ dla równań zlinearyzowanych (6 - 8).

3. Iterujemy wyjściowe i zlinearyzowane równania ruchu. Każda iteracja daje jeden nowy wektor $\vec{r}$ z równań wyjściowych i trzy nowe wektory $\Delta\vec{r}_\alpha$ z równań zlinearyzowanych.

4. Stosując procedurę Grama-Schmidta tworzymy zbiór ortogonalnych wektorów $\Delta\vec{r}'_\alpha$.

5. Kładziemy $\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}'$.

6. Akumulujemy sumy S_α gdzie $S_\alpha \to S_\alpha + \ln|\Delta\vec{r}_\alpha(t)|$.

7. Powtarzamy kroki (3-6) i obliczamy wykładniki Lapunowa λ_α z zależności $\lambda_\alpha = \frac{1}{n}S_\alpha$, gdzie n jest liczbą iteracji.

3 Rozwiązanie zagadnienia dla modelu Lorenza

3.1 Testowanie programu

W celu obliczenia widma Lapunowa napisano program dla maszyny HP serii 700 w Fortranie 90, który implementuje algorytm przedstawiony w punkcie 2 niniejszej pracy.

Aby rozwiązać numerycznie równania różniczkowe dla modelu Lorenza, sprowadzono je do postaci iteracyjnej:

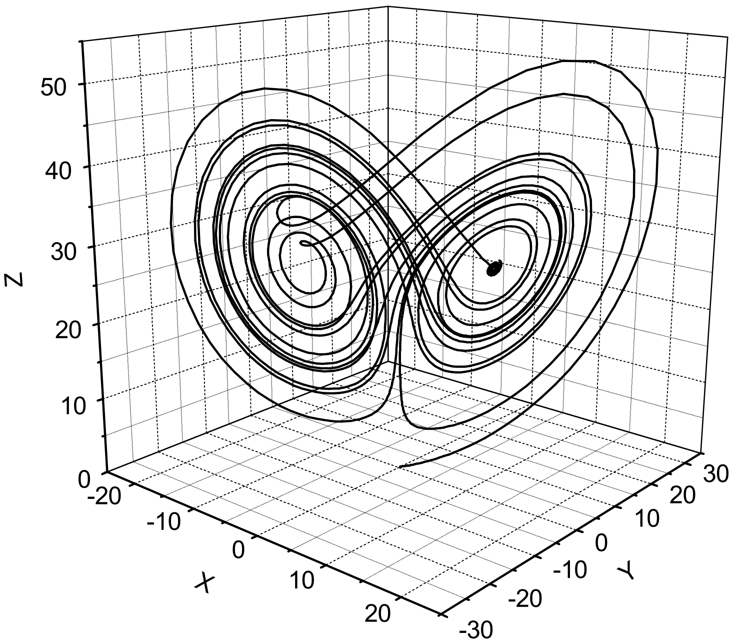
$$x_{n+1} = (-\sigma x_n + \sigma y_n)h + x_n, \tag{9}$$

$$y_{n+1} = (-x_n z_n + r x_n - y_n)h + y_n, \tag{10}$$

$$z_{n+1} = (x_n y_n - b z_n)h + z_n. \tag{11}$$

W tym celu posłużono się prostym modelem Eulera, gdzie h jest krokiem metody Eulera. Jednakże obliczenia dokonane tą metodą obarczone są dość dużym błędem, który rośnie wraz z kolejną iteracją. Powodem tego są błędy wynikające z obliczeń komputerowych. Duże znaczenie ma też właściwy dobór kroku h, jeżeli h z jakim wykonujemy obliczenia jest zbyt mały, błąd obliczeń się zwiększa. Nie mniej jednak metoda ta jest jak najbardziej poprawna. Jeśli tylko odpowiednio dobierze się parametry do jej zastosowania, można uzyskać wyniki obarczone małym błędem. Sposobem na to by błąd ten był możliwie jak najmniejszy jest dobranie odpowiedniego kroku. W tej pracy przy obliczeniach przyjęto krok $h = 0,01$, jako dający miarodajne wyniki przy zastosowaniu modelu Eulera dla rozwiązania układu równań różniczkowych z modelu Lorenza. W wyniku numerycznego rozwiązania równań (9 - 11) dla wartości parametrów zapostulowanych przez Lorenza $\sigma = 10$, $r = 24,74$ i $b = \frac{8}{3}$ jako parametrów, powyżej których występują zachowania chaotyczne[2], otrzymano wyniki, które na wykresie dały nam atraktor zgodny z atraktorem chaotycznym układu Lorenza (rysunek 1).

[2] „*Chaos determistyczny*", H. G. Schuster - str. 229



Rysunek 1: Atraktor chaotyczny układu Lorenza.

Na podstawie otrzymanych wyników obliczeń numerycznych dla modelu Lorenza i sporządzonego na ich podstawie rysunku 1 wnioskuję o poprawności otrzymanego rozwiązania.

Przy rozwiązywaniu układu zlinearyzowanych równań Lorenza również posłużono się metodą Eulera jako metodą poprawną.

Do ortogonalizacji wektorów otrzymanych w wyniku iteracji zlinearyzowanych równań Lorenza użyto bibliotecznej procedury ortogonalizacji Grama-Schmidta. Parametrem wejściowym tej procedury jest macierz, w której kolumnach zawarte są wektory do ortogonalizacji. Na wyjściu macierz wejściowa nadpisana jest przez macierz zawierającą wektory zortogonalizowane. Po wstawieniu danych przykładowych załączonych do procedury bibliotecznej do mojego programu uzyskałem wyniki identyczne z wynikami przykładowymi. Na tej podstawie wnioskuje o poprawnej implementacji procedury ortogonalizacji Grama-Schmidta do mojego programu.

W celu oszacowania widma Lapunowa reprezentującego stacjonarny atraktor, przy obliczeniach wykładników Lapunowa uwzględniłem tylko dane otrzymane po wygaśnięciu transientu początkowego. Jako transient początkowy przyjąłem 60 pierwszych iteracji równań modelu Lorenza. Dodatkowo dla każdego pomiaru wykładników Lapunowa wykonałem 50,000 iteracji. Powyżej 50,000 iteracji otrzymane wartości wykładników Lapunowa w niewielkim stopniu zależą od liczby iteracji, zatem dobór takiej właśnie liczby zapewnienia dostateczną dokładność wykonywanych obliczeń.

3.2 Przebieg obliczeń

W pierwszej kolejności przeprowadzono obliczenia w celu uzyskania wykładników Lapunowa dla zadanych parametrów $\sigma = 16$, $b = 4$ i $r = 45,92$. Jako wartość początkową dla wyjściowego układu równań Lorenza (3 - 5) przyjęto $\vec{r}(0) = (0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}1)$. Natomiast dla zlinearyzowanych równań Lorenza (6 - 8) przyjęto 3 ortogonalne wartośći początkowe $\Delta\vec{r}_1(0) = (1;0;0)$, $\Delta\vec{r}_2(0) = (0;1;0)$ i $\Delta\vec{r}_3(0) = (0;0;1)$. Uzyskane wartości wykładników Lapunowa λ dla parametrów $\sigma = 16$, $b = 4$ i $r = 45,92$ to:

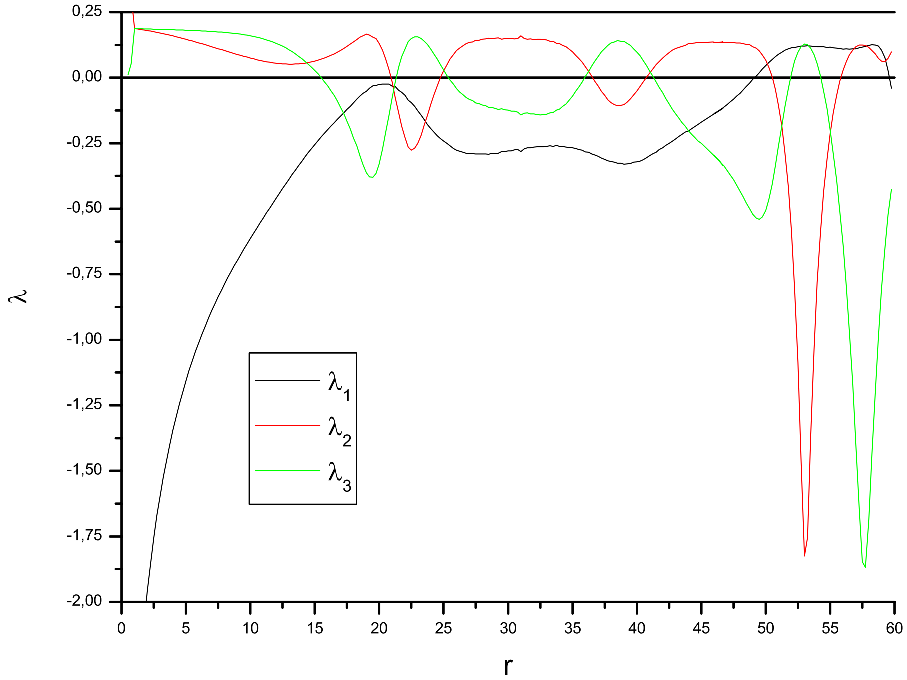
$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -0,14129147943968 \\
\lambda_2 &= 0,135962814296652 \\
\lambda_3 &= -0,29375683273752
\end{aligned}$$

Wykładnik Lapunowa λ_2 jest dodatni zatem badany układ dla zadanych parametrów jest chaotyczny.[3]

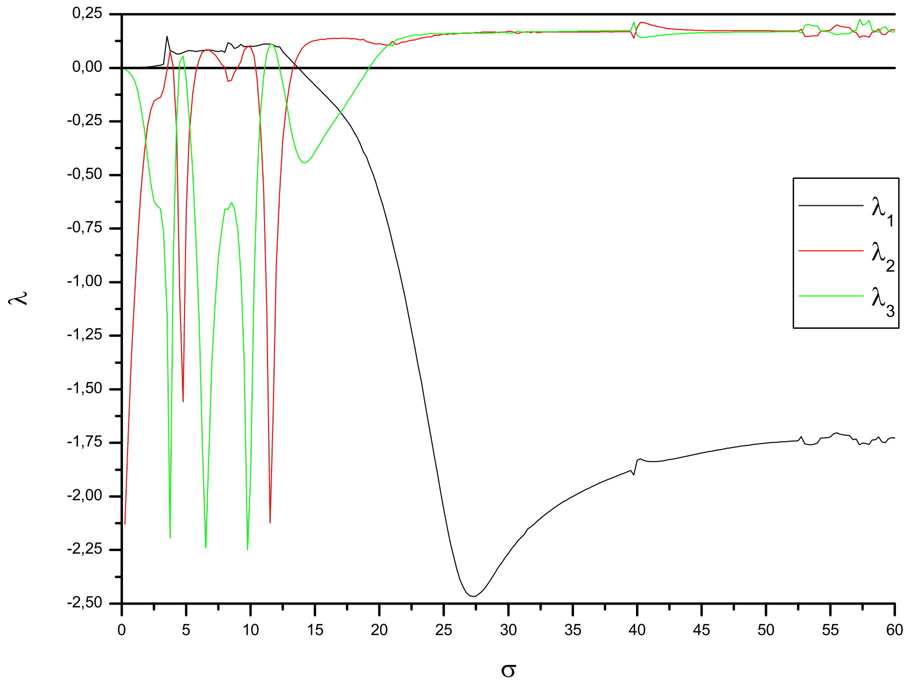
Następnie celem porównania wyników zbadano inne wartości parametrów σ, b i r. Tym samym otrzymano wykresy (2 - 4) zależności wykładników Lapunowa od parametrów kontrolnych modelu Lorenza σ, b i r. W niniejszej pracy obliczono widma Lapunowa reprezentujące stacjonarny atraktor Lorenza, czyli taki, otrzymany po wygaśnięciu transientu początkowego.

Na rysunkach (2 - 4) przedstawione są otrzymane widma Lapunowa w zależności od parametrów r, σ i b.

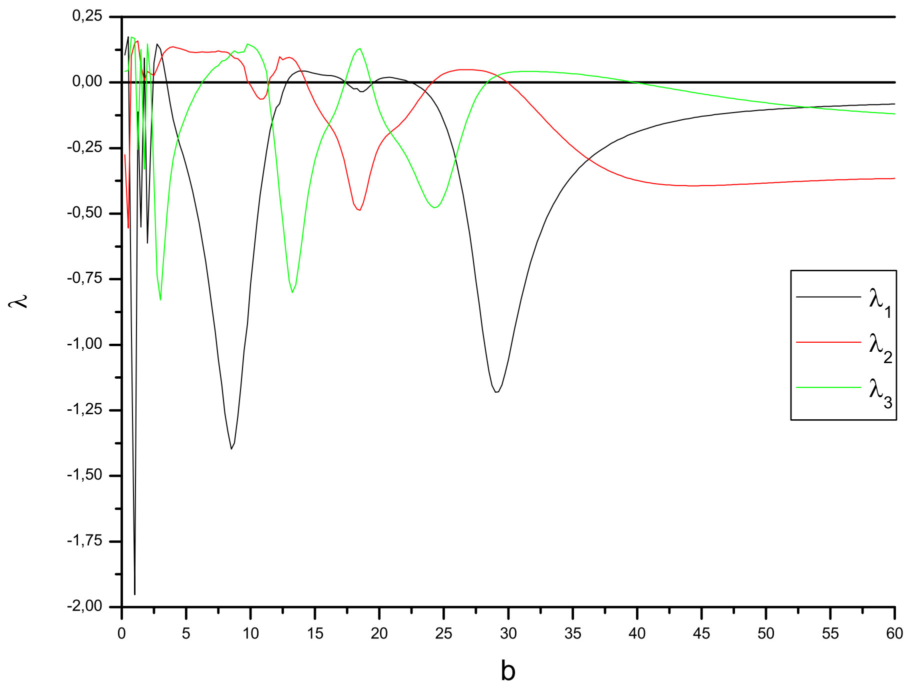
[3] „*Wstęp do dynamiki układów chaotycznych*”, G. L. Baker, J. P. Gollub - str. 93



Rysunek 2)Wykładniki Lapunowa w funkcji parametru r. $\sigma = 16$, $b = 4$.



Rysunek 3)Wykładniki Lapunowa w funkcji parametru σ. $r = 45,92$, $b = 4$.



Rysunek 4)Wykładniki Lapunowa w funkcji parametru b. $\sigma = 16$, $r = 45,92$.

Analizując otrzymane widma Lapunowa zauważono, ze niezależnie od badanych parametrów przynajmniej jeden z wyładników Lapunowa λ jest dodatni, zatem badany układ dynamiczny jest układem chaotycznym. Dodatkowo na rysunku 3 dla parametru $\sigma > 22$ dwa wykładniki Lapunowa są dodatnie, zatem badany układ jest hiperchaotyczny. Jedynie na rysunku 4 dla parametru $b > 40$ wszystkie trzy wykładniki Lapunowa λ są ujemne, zatem może to świadczyć, że powyżej parametru $b = 40$ badany układ nie jest mocno zależny od zmiany warunków początkowych, gdyż jest to charakterystyczne tylko tam, gdzie wykładnik jest dodatni. Zauważono również, analizując otrzymane widma Lapunowa, że suma wykładników Lapunowa jest zawsze ujemna. Automatycznie wynika z tego, że niezależnie od badanych parametrów zawsze przynajmniej jeden z wykładników jest ujemny. Nie występuje sytuacja, w której wszystkie trzy wykładniki Lapunowa byłyby jednocześnie dodatnie. Jest to warunek niezbędny, aby suma wykładników Lapunowa mogła być ujemna:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i < 0, \tag{12}$$

co jest konieczne dla układów dysypatywnych.[4] Badany układ nie jest układem dysypatywnym, zatem warunek (12) nie jest dla badanego układu konieczny.

[4] „*Wstęp do dynamiki układów chaotycznych*", G. L. Baker, J. P. Gollub - str. 93

4 Obliczanie widma Lapunowa dla odwzorowania Henona

4.1 Problem fizyczny

Odwzorowanie Henona jest przykładem dyskretnego układu dynamicznego drugiego rzędu wykazującego dynamikę chaotyczną.[5] Jest ono dwuwymiarowym rozszerzeniem jednowymiarowego odwzorowania logistycznego. Relacje rekurencyjne dla odwzorowania Henona:

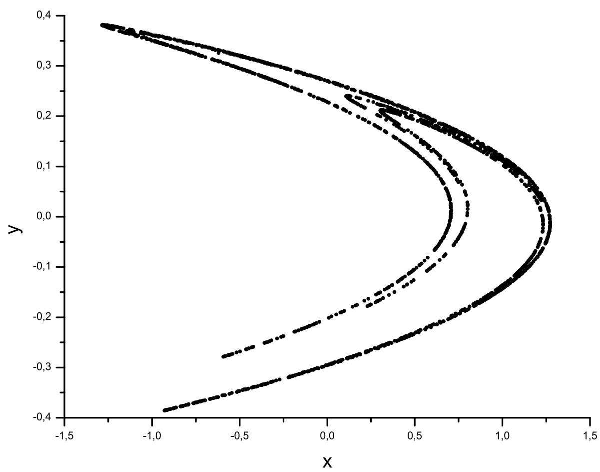
$$x_{n+1} = y_n + 1 - a{x^2}_n, \tag{13}$$

$$y_{n+1} = bx_n, \tag{14}$$

gdzie a oraz $|b| \leqslant 1$ są liczbami rzeczywistymi.[6] Jeżeli $b = 1$, odwzorowanie to zachowuje powierzchnię, jeśli $|b| < 1$, to jest dysypatywne, czyli ma własność zmniejszania powierzchni fazowej (rysunek 5).

4.2 Obliczenia

W wyniku iteracji równań rekurencyjnych (13) i (14) odwzorowania Henona otrzymano trajektorię układu składającą się z 2000 punktów (rysunek 5) zgodną z atraktorem Henona.[7]



Rysunek 5: Atraktor Henona zbudowany z 2000 punktów.

[5] „*A two dimensional map with a strange attractor*”, M. Henon - str. 463
[6] „*Chaos deterministyczny*”, H.G.Schuster - str. 30-31
[7] „*Chaos deterministyczny*”, H.G. Schuster - str. 117

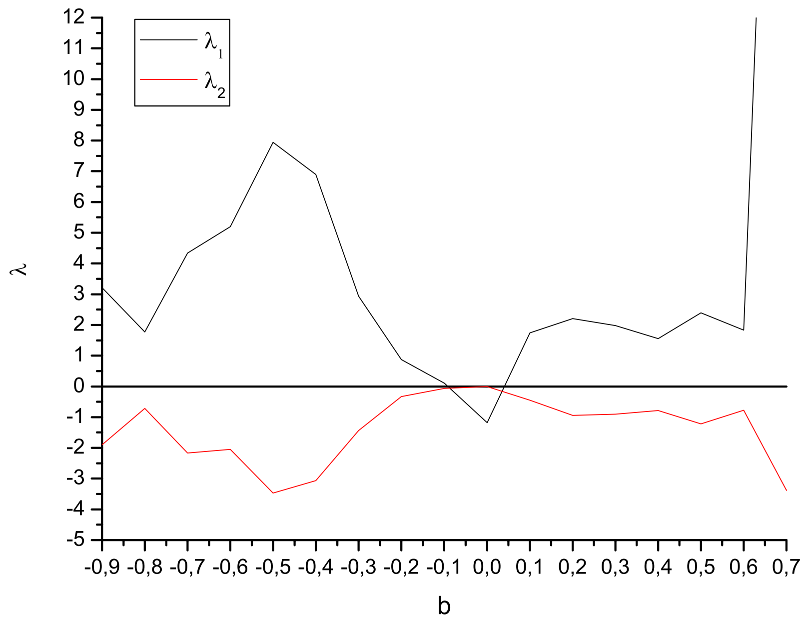
W celu znalezienia wykładnika Lapunowa λ dla odwzorowania Henona, użyto algorytmu z punktu 2 niniejszej pracy. Gdzie równaniem wyjściowym są rekurencyjne relacje odwzorowania Henona (13) i (14). Natomiast zlinearyzowane równania Henona są postaci:

$$\Delta x_{n+1} = \Delta y_n + 1 - a(x_n \Delta x_n + \Delta x_n x_n), \tag{15}$$
$$\Delta y_{n+1} = b\Delta x_n. \tag{16}$$

Ponieważ odwzorowanie Henona jest odwzorowaniem dwuwymiarowym otrzymano dwa wykładniki Lapunowa λ_1 i λ_2 dla odwzorowania Henona przy zadanych parametrach $a = 1,4$ i $b = 0,3$:

$$\lambda_1 = 1,97630726201042$$
$$\lambda_2 = -0,9003276249162$$

Następnie celem zbadania widma Lapunowa dla odwzorowania Henona powtórzono obliczenia zmieniając po każdej iteracji wartość parametru b. Otrzymane widmo Lapunowa przedstawiono na rysunku 6.



Rysunek 6: Wykładniki Lapunowa dla odwzorowania Henona w funkcji parametru b, $a = 1,4$.

Widać na wykresię, że przynajmniej jeden wykładnik Lapunowa jest zawsze dodatni, zatem zgodnie z przewidywaniami dla zadanych parametrów badany układ jest układem chaotycznym. Jedynie dla parametru $b = 0$ wykładnik Lapunowa $\lambda_2 = -5.91526 \cdot 10^{-13}$ jest bliski 0 natomiast $\lambda_1 < 0$, co może być spowodowane nieznacznym błędem obliczeń numerycznych lub brakiem chaosu dla parametru $b = 0$.

5 Wnioski

Obliczanie wykładników Lapunowa pozwala określić czy badany układ jest chaotyczny, czy też nie. Układ chaotyczny, to taki układ, którego ewolucja mocno zależy od warunków początkowych. Zatem mała różnica w warunkach początkowych może doprowadzić do dużych różnic w wyniku końcowym. Wykładniki Lapunowa są właśnie średnią miarą rozbiegania się trajektorii takiego układu. Z praktycznego punktu widzenia układy chaotyczne są więc nieprzewidywalne w długich okresach czasu. W przypadku zachowania chaotycznego co najmniej jeden wykładnik Lapunowa jest większy od zera. Mówimy zatem, że układ zachowuje się chaotycznie, gdy co najmniej największy wykładnik Lapunowa jest większy od zera. Zmieniając parametry układu możemy uzyskać widmo Lapunowa i tym samym badać zachowanie się układu chaotycznego w zależności od parametrów zewnętrznych.